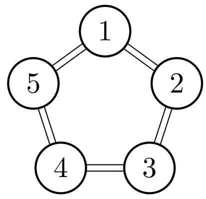
Devoir maison n° 11 : Correction

Exercice 1. (*D'après Centrale TSI 2016*)



Deux personnes sont perdues dans un labyrinthe composé de cinq pièces disposées comme indiqué sur la figure ci-contre. Chaque pièce est reliée aux deux pièces voisines par un couloir. Les couloirs sont représentés par les segments du dessin.
À l'instant $n = 0$, les deux personnes se situent dans deux pièces voisines (par exemple les pièces 1 et 2). Elles partent alors à la recherche l'une de l'autre selon les règles suivantes :

— à partir d'une pièce, chacune peut aller dans l'une ou l'autre des deux pièces voisines, les deux possibilités étant de probabilité $1/2$;

— les déplacements des deux personnes se font simultanément ;

— les choix des déplacements sont indépendants les uns des autres ;

— on suppose que les deux personnes ne peuvent ni se retrouver ni se voir dans les couloirs qui relient entre elles les différentes pièces ;

— les deux personnes se déplacent jusqu'à se retrouver dans une même pièce ; une fois qu'elles se sont retrouvées, elles restent ensemble lors de leurs déplacements futurs.

Pour tout entier naturel n, on note :

— A_n l'événement « les deux personnes sont dans la même pièce après n déplacements » et $a_n = P(A_n)$;

— B_n l'événement « les deux personnes sont dans des pièces voisines (par exemple les pièces 1 et 2 ou les pièces 1 et 5) après n déplacements » et $b_n = P(B_n)$;

— C_n l'événement « les deux personnes sont dans des pièces non voisines (par exemple les pièces 1 et 3 ou les pièces 1 et 4) après n déplacements » et $c_n = P(C_n)$.

1. Donner les valeurs de a_0, b_0 et c_0.

À l'instant $t = 0$, les deux personnes se trouvent dans deux pièces voisines, *i.e.* B_0 est réalisé alors que A_0 et C_0 non. Ainsi $\boxed{a_0 = c_0 = 0 \text{ et } b_0 = 1}$.

2. Soit n un entier naturel. Donner les probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$ et $P_{C_n}(A_{n+1})$. On justifiera précisément à l'aide des règles décrites ci-dessus.

• Si les deux personnes sont dans la même pièce à l'instant n, elles le restent à l'instant $n+1$ donc $\boxed{P_{A_n}(A_{n+1}) = 1}$.

• Si elles sont dans des pièces voisines à l'instant n, elles ne peuvent pas se retrouver dans la même pièce à l'instant $n+1$ car elles doivent toutes deux se déplacer d'une pièce donc $\boxed{P_{B_n}(A_{n+1}) = 0}$.

• Si elles se trouvent dans des pièces non voisines à l'instant n (par exemple 1 et 3), la seule façon de se retrouver dans la même pièce à l'instant suivant est qu'elles aillent toutes deux dans la pièce qui les sépare (2 dans notre exemple) donc $\boxed{P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}}$.

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}c_n$.

D'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événement (A_n, B_n, C_n), on a

$$\begin{aligned}
P(A_{n+1}) &= P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n) + P(A_{n+1} \cap C_n) \\
&= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \qquad Q2 \\
&= 1 \times P(A_n) + 0 \times P(B_n) + \frac{1}{4}P(C_n) \\
&= \boxed{a_n + \frac{1}{4}c_n}.
\end{aligned}$$

4. Donner, sans justification, une expression de c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

   On admet que l'on obtient de façon analogue que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \dfrac{3}{4}b_n + \dfrac{1}{4}c_n$.

   En procédant comme dans les deux questions précédentes, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{c_{n+1} = \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{2}c_n}$.

5. On note $u_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A telle que la relation $u_{n+1} = Au_n$ soit vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Avec les trois relations des questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{pmatrix} = Au_n, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

   Remarque : cette question est totalement inutile pour la suite mais c'est un grand classique, la réduction de A aurait aussi permis de déterminer l'expression des trois suites en jeu.

6. On se propose de déterminer l'expression des trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 suivante :

$$b_{n+2} = \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n.$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après Q4 pour b_{n+2} puis pour c_{n+1}, on a

$$b_{n+2} = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}c_{n+1} = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n\right) = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{8}c_n.$$

   Or, toujours d'après Q4, on a $b_{n+1} = \dfrac{3}{4}b_n + \dfrac{1}{4}c_n$, ce qui se réorganise en $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n$. Finalement, on obtient

$$b_{n+2} = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{8}(4b_{n+1} - 3b_n) = \boxed{\frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n}.$$

   (b) En déduire l'expression de b_n en fonction de n.

   - L'équation caractéristique associée à la relation obtenue précédemment est $r^2 - \frac{5}{4}r + \frac{5}{16} = 0$.

   Son discriminant vaut $\Delta = \frac{25}{16} - 4 \times \frac{5}{16} = \frac{5}{16} = \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2$ donc les racines sont $\dfrac{\frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}}{2} = \boxed{\dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{8}}$.

   Notons-les r_1 (celle avec le signe $-$) et r_2 (avec le signe $+$).

   Ainsi, d'après le cours, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{b_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n}$.

   Petit aparté : étant donné le résultat donné pour c_n juste après cette question, ces racines nous rassurent quant au fait qu'on soit sur la bonne voie.

   - Or d'après Q1, on a $b_0 = 1$ et avec Q4, on obtient $b_1 = \frac{3}{4}$. En injectant dans l'expression précédente, il vient

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha r_1 + \beta r_2 = \frac{3}{4} \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow 8L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \beta = 1 - \alpha \\ (5 - \sqrt{5})\alpha + (5 + \sqrt{5})(1 - \alpha) = 6 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 - \alpha \\ \alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \\ \beta = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \end{cases}.$$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ b_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^n}$.

Ouf, je vous avais prévenu, c'était un beau calcul !

On admet que, grâce à ce résultat et à Q4, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \frac{-1}{\sqrt{5}}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^n.$$

(c) Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leurs limites et en donner une interprétation.

- On a $0 \leqslant \frac{5-\sqrt{5}}{8} \leqslant \frac{5+\sqrt{5}}{8} < \frac{5+3}{8} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^n = 0$.

D'après la question précédente et le résultat admis, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0}$.

- Par ailleurs, comme (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements, on a $a_n = 1 - b_n - c_n$, d'où, avec ce qui précède, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1}$.

- Cela signifie que les deux personnes sont $\boxed{\text{presque sûres de se retrouver}}$ au bout d'une grand nombre de déplacements, cela est conforme à l'intuition.

7. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note R_n l'événement : « les deux personnes se retrouvent pour la première fois après n déplacements ».

(a) Justifier que $P(R_0) = P(R_1) = 0$.

- D'après l'énoncé, à l'instant $n = 0$, les deux personnes se situent dans deux pièces voisines donc $\boxed{P(R_0) = 0}$.

- Par définition, $R_1 = \overline{A_0} \cap A_1 = \overline{\varnothing} \cap A_1 = \Omega \cap A_1 = A_1$.

Or, d'après Q3, on a $P(A_1) = a_1 = a_0 + \frac{1}{4}c_0 = 0$, d'où $\boxed{P(R_1) = 0}$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement R_n en fonction de A_n et C_{n-1}.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme d'après l'énoncé « une fois qu'elles se sont retrouvées, les deux personnes restent ensemble lors de leurs déplacements futurs », on a $R_n = A_n \cap \overline{A_{n-1}}$ (premières retrouvailles à l'instant n). Or $(A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1})$ est un système complet d'événements donc $\overline{A_{n-1}} = B_{n-1} \cup C_{n-1}$. Par distributivité, on obtient

$$R_n = A_n \cap (B_{n-1} \cup C_{n-1}) = (A_n \cap B_{n-1}) \cup (A_n \cap C_{n-1}) \overset{Q2}{=} \varnothing \cup (A_n \cap C_{n-1}) = \boxed{A_n \cap C_{n-1}}.$$

(c) En déduire l'expression de $P(R_n)$ en fonction de n.

On a déjà obtenu $P(R_0) = P(R_1) = 0$.

Soit $n \geqslant 2$. D'après la question précédente, $P(R_n) = P(A_n \cap C_{n-1}) = P(C_{n-1})P_{C_{n-1}}(A_n) \overset{Q2}{=} \frac{1}{4}c_{n-1} \overset{Q6b}{=} \boxed{\frac{-1}{4\sqrt{5}}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^{n-1} + \frac{1}{4\sqrt{5}}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^{n-1}}$.

On peut remarquer que pour $n = 1$, cette expression donne 0 donc elle est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le cas $n = 0$ restant à part.

Exercice 2. ★ (*D'après un oral de X-ESPCI PC*)
On range n boules dans n boîtes. Déterminer la probabilité π_n qu'une seule boîte soit vide. Donner un équivalent de π_n lorsque $n \to +\infty$.

- On modélise ainsi : l'univers est l'ensemble Ω des applications f de $[\![1\,;n]\!]$ (les boules) dans $[\![1\,;n]\!]$ (les boîtes), muni de la tribu pleine $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme. En particulier $\mathrm{Card}(\Omega) = n^n$.

Comme on veut une unique boîte vide, on s'intéresse à

$$A_n = \{f \in \Omega \mid \mathrm{Card}(\mathrm{Im}\, f) = n-1\}.$$

Un élément f de A_n est entièrement déterminé par :

– le choix de l'unique élément $a \in [\![1\,;n]\!]$ qui n'a pas d'antécédent par f (*i.e.* la boîte vide) ;
– le choix de l'unique élément $b \in [\![1\,;n]\!] \setminus \{a\}$ qui a deux antécédents par f (*i.e.* la boîte qui contient deux boules) ;
– le choix des deux antécédents c et d de b (*i.e.* les deux boules qui sont dans la même boîte) ;
– le choix d'une bijection de $[\![1\,;n]\!] \setminus \{c,d\}$ dans $[\![1\,;n]\!] \setminus \{a,b\}$ (*i.e.* le rangement de toutes les autres boules dans des boîtes distinctes).

Ainsi $\mathrm{Card}(A_n) = n \times (n-1) \times \binom{n}{2} \times (n-2)! = \binom{n}{2} n!$ et donc la probabilité recherchée est

$$\pi_n = \frac{\mathrm{Card}(A_n)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \boxed{\binom{n}{2}\frac{n!}{n^n}}.$$

- D'après la définition du coefficient binomial et la formule de Stirling,

$$\pi_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{\sqrt{2\pi n}\,\cancel{n^n}\,\mathrm{e}^{-n}}{\cancel{n^n}} \underset{+\infty}{\sim} \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,n^{5/2}\,\mathrm{e}^{-n}}.$$